

بدنام آن که جان را فکرت آموخت

۱. اگر بدانیم $A \subset \mathbb{N}$ و $1 \in A$ و به ازای هر $k \in A$ ، $k+1 \in A$ ، آن گاه مجموعه A را مشخص کنید. (۱ نمره)

۲. با استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع هر هفت عدد صحیح متوالی، مضرب ۷ است. (۱ نمره)

۳. اگر $a \in \mathbb{N}$ ، ثابت کنید $a^2 - 1$ بر ۵ بخش پذیر است. (۱/۵ نمره)

۴. اگر a و b عددهایی حقیقی و مثبت باشند، با استدلال بازگشتی ثابت کنید $a^2 + b^2 \geq a^2 b + ab^2$. (۱/۵ نمره)

۵. اگر $x, y, z \in \mathbb{Z}$ ، آن گاه ثابت کنید عبارت زیر همواره عددی زوج است. (۱ نمره)

$$A = (x-2)(y+7)(z-1) - (x+1)(y-1)(z+2)$$

۶. با استقرای ریاضی ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، رابطه $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ برقرار است. (۲ نمره)

۷. از بین عددهای طبیعی یک زیر مجموعه ۱۲ عضوی به دلخواه انتخاب می کنیم. ثابت کنید دست کم دو عضو در بین عضوهای این زیرمجموعه وجود دارد که تقاضی آن ها مضرب ۱۱ است. (۱ نمره)

۸. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید مجموع یک عدد گویا و یک عدد ناگویا، عددی ناگویا است. (۱ نمره)

۹. اگر $A \subset B$ و $B \subset C$ ، آن گاه ثابت کنید $A \subset C$. (۱ نمره)

۱۰. اگر مجموعه های $A = \{m \mid m \in \mathbb{N} - \{1\}, 3^{m-1} \leq m^2\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 + ax + b = 0\}$ برابر باشند،

آن گاه حاصل $a+b$ را پیدا کنید. (۱ نمره)

۱۱. درستی تساوی زیر را ثابت کنید. (۱ نمره)

$$[(A-B) \cup (B-A)] \cup (A \cap B) = A \cup B$$

۱۲. ثابت کنید $A - (B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$. (۱/۵ نمره)

۱۳. اگر هر یک از گزاره های زیر درست است، آن را اثبات کنید و اگر نادرست است، آن را با مثال نقض رد کنید:

الف) $[(A-C = B \cap C') \wedge (A \cup C' = B \cup C')] \Rightarrow A = B$ (۱ نمره)

ب) $[(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)] \Rightarrow A = C$ (۱ نمره)

۱۴. با فرض آن که بدانیم عمل تقاضی متقارن روی مجموعه ها دارای ویژگی های شرکت پذیری و جابه جایی است و

$$A \Delta A = \emptyset \text{ و } \emptyset \Delta A = A, \text{ ثابت کنید اگر } A \Delta B = C, \text{ آن گاه } B \Delta C = A. \text{ (۱ نمره)}$$

۱۵. اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، و رابطه \mathcal{R} به صورت $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a^2(b+1) \leq 10$ تعریف شده باشد، آن گاه

رابطه \mathcal{R} را با عضوهایش بنویسید. (۱/۵ نمره)

۱۶. اگر $A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 9\}$ و $B = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y \leq x^2 + 1\}$ ، آن گاه مجموعه

نقطه های $A \cap B$ را در یک دستگاه محورهای مختصات دو بعدی مشخص کنید. (۱ نمره)